2個の単純群を半単純成分にもつ可約な概均質ベクトル空間の分類について(概均質ベクトル空間の展望)

犬塚, 晶明

数理解析研究所講究録
555巻 1985年 106-115

2個の単純群を半単純成分にもつ可約な概均質ベクトル空間の分類について

筑波大 大学院修士
犬塚 晶明

序.

連結線型代数群 G の有現次元有理表現 $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ が Zariski dense G-orbit をもつとき (G, ρ, V) を概均質ベクトル空間 (prehomogeneous vector space 以下, P.V. と略す) という。但し, すべて複素数体 $\mathbb{C}$ 上で定義されているものとする。ところで, 概均質ベクトル空間の分類において、次の問題が, 現段階における, 最終目標として未解決のまま残されている。

<u>問題</u> $G_1, \cdots, G_k$ を $\mathbb{C}$ 上の単純線型代数群, $G' = G_1 \times \cdots \times G_k$ とするとき, G' の有限次元有理表現 $\rho' : G' \longrightarrow GL(V)$ は $\rho' = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_l$, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_l$ と既約表現の直和に分解される。そして, G を $GL(1)^l \times G'$ とし, G の V 上への表現 ρ を ρ' と $GL(1)^l$ の各 V_i へのスカラー倍としての

作用との合成とする。但し，$GL(1)^l$ は各 V_i へ独立に作用しているものと仮定する。

このとき，問題は P.V.（G, ρ, V）の分類である。

（可約な概均質ベクトル空間の分類とよんでいる。）

この問題に対して，現在までに得られている結果は次のものである。

(1) $l = 1$，$k =$ 任意（[1]）（以下，既約 P.V. とよぶ）

(2) $l =$ 任意，$k = 1$（[2]）

(3) l，$k =$ 任意，V が有限個の G－*orbit* をもつ（[3]）

しかし，現在のところ，一般の場合の解決に対して，その手がかりがつかめていない。そこで，解決のための実験台として，

(4) $l =$ 任意，$k = 2$（2－*simple* P.V. とよぶ）

である P.V.（G, ρ, V）の分類を [6] において考察した。

この小論では，2－*simple* P.V. の分類の現状として [ ] によって得られた結果の概略を述べる。

なお，2－*simple* P.V. の分類は，3 年程前より木村達雄先生と保倉保美氏により研究が始められ，笠井伸一氏もまた，研究に多大な貢献をされており，現在も，研究が進められている。最後に，筆者にこの小論を勧めて下さり，そして多くの有益な助言を与えて頂いた木村達雄先生に深く感謝します。

1. [ ] の結果の概略

(G, ρ, V) を序. の(4)のものとする ($G = GL(1)^{l} \times G_1 \times G_2$)。

(G, ρ, V) が P.V. ならば, (G, ρ_i, V_i) は既約 P.V. である。既約 P.V. は [1] において完全に分類されており, $k=2$ の場合には, 大きく次の①, ②のタイプに分けることができる。

① trivial 既約 P.V. $(G_1 \times GL(m),\ \tau \otimes \square,\ W \otimes V(m))$

ここで, G_1, τ は $\deg \tau = \dim W \leqq m$ をみたすならば, 任意のものがとれる。

② non-trivial 既約 P.V. ①以外の既約 P.V.

①に比べると, 群, 表現等はかなり制限される。

また, 上の ρ_i は既約であるから, 既約有理表現 $\tau_i : G_1 \to GL(W_i)$, $\tau_i' : G_2 \to GL(W_i')$ が存在して

$$(G, \rho_i, V_i) \cong (GL(1) \times G_1 \times G_2,\ \tau_i \otimes \tau_i',\ W_i \otimes W_i')$$

と表わすことができる (I. Schur)。 ただし, $\cong$ は三つ組の同値 ([1], P. 36, Def. 4) とする。

よって, (G, ρ, V) は次のように仮定してよい。

☆ $(GL(1)^{l} \times G_1 \times G_2,\ \tau_1 \otimes \tau_1' \oplus \cdots \oplus \tau_{l_1} \otimes \tau_{l_1}' \oplus \sigma_1 \otimes 1 \oplus \cdots \oplus \sigma_{l_2} \otimes 1 \oplus 1 \otimes \sigma_1' \oplus \cdots$
$\oplus 1 \otimes \sigma_{l_3}',\ V_1 \oplus \cdots \oplus V_l) = (G,\ \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_l,\ V_1 \oplus \cdots \oplus V_l)$

但し, $l = l_1 + l_2 + l_3$; $\tau_1, \cdots, \tau_{l_1}, \sigma_1, \cdots, \sigma_{l_2}$ は G_1 の既約表現; $\tau_1', \cdots, \tau_{l_1}', \sigma_1', \cdots, \sigma_{l_3}'$ は G_2 の既約表現; $\forall i = 1, \cdots, l_1$ に対して, $\tau_i \neq 1$ かつ $\tau_i' \neq 1$ とする。以下, 上の記号を固定して用いる。

ここで，もし$l_1=0$ならば，[　]の結果へ完全に帰着されるから，$l_1 \geqq 1$と仮定してよい。

すると，2-simple P.V.を次のようにまとめることが考えられる。

(I)あるi $(=1,\cdots,l_1)$が存在して(G, ρ_i, V_i)はnon-trivial既約P.V.であるもの。

(II)任意のi $(=1,\cdots,l_1)$に対して(G, ρ_i, V_i)はtrivial既約P.V.であるもの。

(II)のGを$GL(1)^l \times G_1 \times SL(m)$とおいて，(II)をさらに分けて，

(II)-(i) あるj $(=1,\cdots,l_3)$が存在して，$\deg \sigma_j' \neq m$

(II)-(ii)任意のj $(=1,\cdots,l_3)$に対して，$\deg \sigma_j' = m$

（注．この場合，σ_jは$SL(m)$の既約表現である。）

と考えることができる。

[6]において，(I)と(II)-(i)の分類が完成された。

1-1，(I)の結果について

分類の方針として，[6]ではnon-trivial既約P.V.を58個に分けて，それぞれが，(G, ρ_1, V_1)に同値である場合に各々調べていった。そして(G, ρ, V) P.V. $\Rightarrow \dim G \geqq \dim V$であり，$(G, \rho_i, V_i)$は既約P.V.であるから，$(G, \rho_i, V_i)$として[1]の既約P.V.の表より，$\dim G \geqq \dim V$となるように選びその各々についてP.V.性を調べていけばよい。

また、裏返し変換とよばれるP.V.性の同値変換がある。

（裏返し変換）　G＝線型代数群, $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ を有理表現, $\dim V = n > m$ とするとき.

$(G \times GL(m),\ \rho \otimes \square,\ V \otimes V(m))$ がP.V.であることと,

$(G \times GL(n-m),\ \rho^* \otimes \square,\ V^* \otimes V(n-m))$ がP.V.であることは

同値である。但し, ρ^* は ρ の反傾表現とする。

この裏返し変換により、既に決定されているP.V.の結果へ帰着させることができる。たとえば,

$(GL(1)^2 \times G_1,\ \rho_1 \oplus \rho_2,\ V_1 \oplus V_2)$ P.V. $\Longleftrightarrow$ $(GL(1) \times G_{x_0},\ \rho_1|G_{x_0},\ V_1)$ P.V.（但し、$G_{x_0} = (GL(1) \times G_1,\ \rho_2,\ V_2)$ の *generic isotropy subgroup*, [1] P.36, Lemma 5.参照）$\underset{\text{裏返し変換}}{\Longleftrightarrow}$ $(GL(n-1) \times G_1,\ \square \otimes \rho_1^*,\ V(n-1) \otimes V_1^*)$ $(n = \dim V_1)$ P.V. $\Longleftrightarrow$ $(GL(1)^2 \times G_1 \times SL(n-1),\ \rho_1^* \otimes \square \oplus \rho_2 \otimes 1,\ V_1^* \otimes V(n-1) \oplus V_2)$ P.V. というように、[2]の結果に帰着できる。

ところで, (I)の結果であるが, 多くのものは, [2], [3]の結果あるいは、それらの裏返し変換等により、そのまま得られる。しかし, 全てがそのように得られるわけではない。特に, (G, ρ_1, V_1) が非正則である場合, 正則であっても群の次元が小さいときや *generic isotropy subgroup* が特殊な場合（$(Spin(10) \times GL(2),\ $半スピン表現$\otimes \square,\ V(16) \otimes V(2))$ のように、*gen. iso. subgp.* の $GL(2)$－成分が $SL(2)$ であるようなもの）等に、その傾向が強いようである。現在のところ, (I)の形のものがどの

くらいあるかの表ができたにすぎず，(I)の結果が，可約P. V. の分類を目標においたとき，どのように位置づけられるか，また，[2]，[3]との関係ということは，これからの研究であり，これ以上の言明はできない。

1－2．(II)－(i)の結果について

(II)のP. V. は，次の形をしているとしてよい。

$$\left(GL(1)^{l}\times G_1\times SL(m),\ \tau_1\otimes\square^{(*)}\oplus\cdots\oplus\tau_{l_1}\otimes\square^{(*)}\oplus\tilde{\sigma}\otimes 1\oplus 1\otimes\tilde{\sigma}',\ V_1\oplus\cdots\oplus V_{l_1}\oplus\tilde{V}\oplus\tilde{V}'\right)$$

（ここで，☆において $\tilde{\sigma}=\sigma_1\oplus\cdots\oplus\sigma_{l_2}$，$\tilde{\sigma}'=\sigma_1'\oplus\cdots\oplus\sigma_{l_3}$，$\tilde{V}=V_{l+1}\oplus\cdots\oplus V_{l_2}$，$\tilde{V}'=V_{l_1+l_2+1}\oplus\cdots\oplus V_{l}$ として，$\tau_i\leqq m$ $(i=1,\cdots,l_1)$ とする。）

まず，この形を整理しよう。$(G\times GL(m),\ \rho\otimes\square,\ V(m)\otimes V(m))$ の generic isotropy subgroup は $\{(g,{}^t\rho(g)^{-1})\mid g\in G\}$ であるから，$\deg\tau_1=m$ ならば $(GL(1)^{l}\times G_1,\ \tau_2\otimes\tau_1^*\oplus\cdots\oplus\tau_{l_2}\otimes\tau_1^*\oplus\tilde{\sigma}\otimes 1\oplus 1\otimes\tilde{\sigma}'\circ\tau_1^*,\ V)$ のP. V. 性に帰着されるから，[2]の結果と本質的に同一である。故に $\deg\tau_i\lneqq m$ $(i=1,\cdots,l_1)$ と仮定してよい。

命題1．Gを線型代数群，τ_1,τ_2をGの有理表現，$m\geqq\deg\tau_1=n_1$，$\deg\tau_2=n_2$とするとき，

(1) $(G\times GL(m),\ \tau_1\otimes\square\oplus\tau_2\otimes\square^*,\ M(n_1,m)\oplus M(n_2,m))$ がP. V. ならば $(G,\ \tau_1\otimes\tau_2,\ M(n_1,n_2))$ もP. V. である。

(2) $n_2\leqq m$ ならば，(1)の逆も成りたつ。

略証）$\tilde{G}=G\times GL(m)$ とし，$\tilde{G}$ の $M(n_1,m)\oplus M(n_2,m)$ 上への作用，$M(n_1,n_2)$ 上への作用をそれぞれ，$(g,h)\in\tilde{G}$ に対して，

$M(n_1, m) \oplus M(n_2, m) \ni (X, Y) \mapsto (\tau_1(g) X {}^t h, \tau_2(g) Y h^{-1})$

$M(n_1, n_2) \ni Z \mapsto \tau_1(g) Z {}^t\tau_2(g)$ により定義するとき，

$f : M(n_1, m) \oplus M(n_2, m) \ni (X, Y) \mapsto X {}^t Y \in M(n_1, n_2)$

は、$\tilde{G}$－準同型写像（$\tilde{G}$-*equivariant morphism*）である。

この f に対して，［1］P.36 の Lemma 5.を適用すれば命題 1. が得られる。//

この命題 1.を用いると．（$GL(1)^2 \times G \times SL(m), \tau_1 \otimes \square \oplus \tau_2 \otimes \square^*$, $V(n_1) \otimes V(m) \oplus V(n_2) \otimes V(m)$）（$2 \leqq n_1, n_2 \leqq m$，$G_1$＝単純）は P.V. ではないことが証明できる。よって，(II) の分類のためには．

$(GL(1)^{l} \times G_1 \times SL(m), (\tau_1 \oplus \cdots \oplus \tau_{l_1}) \otimes \square \oplus \tilde{\sigma} \otimes 1 \oplus 1 \otimes \tilde{\sigma}', V)$

（ここで，$2 \leqq \deg \tau_i < m$（$i = 1, \cdots, l_1$）とする。）

という３つ組に対して，その P.V. 性を調べればよい。

次に，(II)－(i) の分類であるが，上の三つ組に対して $\tilde{\sigma}'$ を $\sigma_1' \oplus \tilde{\sigma}_2$（$\sigma_1'$ = $SL(m)$ の既約表現）としたとき，$\deg \sigma_1' \gneqq m$ であるような P.V. を分類すればよい。このような σ_1' は（$GL(m)$, σ_1', V_1'）が P.V. でなければならないから，［1］より

$\sigma_1' = $ 日$^{(*)}$，目$^{(*)}$（$m = 6, 7, 8$），田$^{(*)}$（ここで，日，目，田はヤング図形日，目，田に対応する既約表現とする。）である。

$\sigma_1' = $ 日$^{(*)}$（m＝偶数），目$^{(*)}$（$m = 6, 7, 8$），田$^{(*)}$ の場合は．（$GL(m)$，σ_1'，V_1'）の *generic isotropy subgroup*（［1］参照）に注意すれば，容易に調べられる（（I）の結果を使うことが

できる)。真に難しいのは、$\sigma_1' = $日$^{(*)}$($m = $奇数)の場合であり,$\sigma_1' = $日については、保倉[4], 笠井[5]の研究がある。そのうち、次の2つの命題は基本的である。

命題2. Gを線型代数群, ρをGの有理表現, $\deg \rho = n$とするとき, 次の(1), (2)が成りたつ。

(1) $(G \times GL(2m+1), \rho \otimes \square \oplus 1 \otimes$ 日$, V(n) \otimes V(2m+1) \oplus V(m(2m+1)))$ が P. V. であることと $(G \times GL(2m+1) \times Sp(m), \rho \otimes \square \otimes 1 \oplus 1 \otimes \square \otimes \square, V(n) \otimes V(2m+1) \oplus V(2m+1) \otimes V(2m))$ が P. V. であることは同値である。

(2) $n \leqq 2m+1$ のとき,
$(G \times GL(2m+1), \rho \otimes \square \oplus 1 \otimes$ 日$, V(n) \otimes V(2m+1) \oplus V(m(2m+1)))$ が P. V. であることと $(G \times GL(n-1), \rho^* \otimes \square \oplus 1 \otimes$ 日$, V(n) \otimes V(n-1) \oplus V((n-1)(2n-3)))$ が P. V. であることは同値である。

証明) [4]参照

命題3. (1) $(GL(2n+1) \times GL(2m+1), \square \otimes \square \oplus 1 \otimes$ 日$, V(2n+1) \otimes V(2m+1) \oplus V(m(2m+1)))$ $(n < m)$ の generic isotropy subalgebra は,

$$\left\{ \left(\left(\begin{array}{c|c} -{}^tA & 0 \\ \hline {}^tb & -c \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc|c} A & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & D \end{array} \right) \right) \,\middle|\, A \in sp(n),\ D \in sp(m-n),\ b \in \mathbb{C}^n,\ c \in gl(1) \right\}$$

と同型である。

(2) $(GL(2n) \times GL(2m+1), \square \otimes \square \oplus 1 \otimes$ 日$, V(2n) \otimes V(2m+1) \oplus V(m(2m+1)))$ $(n \leqq m)$ の generic isotropy subalgebra は

$$
\left\{ \left(\left(\begin{array}{c|cc|c} -d & -{}^tc_2-{}^tc_3 & -{}^tc_1-{}^tc_4 & -c_7-c_8 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c|}{-{}^tA} & -c_1 \\ & \multicolumn{2}{c|}{} & c_2 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} & d-d_1 \end{array}\right) \begin{array}{l} 1 \\ n-1 \\ n-1 \\ 1 \end{array} , \left(\begin{array}{c|cc|c|cc|c} d & \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 \\ \hline c_2+c_3 & \multicolumn{2}{c|}{A} & 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} & c_2 \\ c_1+c_4 & \multicolumn{2}{c|}{} & & \multicolumn{2}{c|}{} & c_1 \\ \hline c_7+c_8 & {}^tc_1 & -{}^tc_2 & d_1-d & -{}^tc_5 & {}^tc_6 & c_7 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & \multicolumn{2}{c|}{B} & -c_6 \\ & \multicolumn{2}{c|}{} & & \multicolumn{2}{c|}{} & -c_5 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} & d-d_1 \end{array}\right) \begin{array}{l} 1 \\ n-1 \\ n-1 \\ 1 \\ m-n \\ m-n \\ 1 \end{array} \right) \right|
$$

$$
A \in sp(n-1),\ B \in sp(m-n),\ c_1, \cdots, c_4 \in \mathbb{C}^{n-1},\ c_5, c_6 \in \mathbb{C}^{m-n},\ c_7, c_8 \in \mathbb{C},\ d, d_1 \in gl(1) \Big\}
$$

と同型である。

証明）[5]の P. 195, 196 の subalgebra を整理すればよい。//

$\sigma_1 = \text{日}^{(*)}$ の場合は，命題1.,2.,3. と裏返し変換を用いて分類を決定できる。

2．(II)－(ii) の分類について．

2－simple P. V. の分類において，未だ分類の完成していないものは，1－2．より次の形の P. V. である。

$$
(GL(1)^l \times G_1 \times SL(m),\ (\tau_1 \oplus \cdots \oplus \tau_{l_1}) \otimes \square \oplus \tilde{\sigma} \otimes 1 \oplus 1 \otimes (\underbrace{\square^{(*)} \oplus \cdots \oplus \square^{(*)}}_{l_3 \text{コ}}))
$$

ここで，$\underbrace{\square^{(*)} \oplus \cdots \oplus \square^{(*)}}_{l_3 \text{コ}} = \underbrace{\square \oplus \cdots \oplus \square}_{p \text{コ}} \oplus \underbrace{\square^* \oplus \cdots \oplus \square^*}_{q \text{コ}}$ とおいて，

$$
(GL(1)^l \times G_1 \times SL(m),\ (\tau_1 \oplus \cdots \oplus \tau_{l_1} \oplus \underbrace{1 \oplus \cdots \oplus 1}_{p \text{コ}}) \otimes \square \oplus \tilde{\sigma} \otimes 1 \oplus 1 \otimes (\underbrace{\square^* \oplus \cdots \oplus \square^*}_{q \text{コ}}))
$$

($\deg \tau_i < m$, $i = 1, \cdots, l_1$) について調べなければならない。この分類のために，次のプログラムがある（笠井伸一氏による）。$\sum_{i=1}^{l_1} \deg \tau_i = n$ とおく。

(i) $p = 0$，$q = m+1$

(ii)－(1) $n + p \leqq m$，$q = 0$

(ii)−(2) $n+p \leqq m,\ 1 \leqq q \leqq m$

(iii) $n \leqq m < n+p$

(iv)−(1) $m < n,\ q = 0$

(iv)−(2) $m < n,\ 1 \leqq q \leqq m$.

の順に調べていくのである。特に(i)〜(iii)については，[ ]の結果へ帰着できるものである。また，(iv)についてもこれまでの研究により，ほとんど完成している。しかし，

$$\left(GL(1)^{l} \times SL(n') \times SL(m),\ (\underbrace{\square \oplus \cdots \oplus \square}_{l_1 \text{コ}}) \otimes \square \oplus (\underbrace{\square^{(*)} \oplus \cdots \oplus \square^{(*)}}_{l_2 \text{コ}}) \otimes 1 \oplus 1 \otimes (\underbrace{\square^{(*)} \oplus \cdots \oplus \square^{(*)}}_{l_3 \text{コ}})\right)$$

$(m < n'l,\ n' < m,\ l = l_1 + l_2 + l_3)$ のP.V.性の判定が難問として残されている。

参考文献

[1] M. Sato - T. Kimura, "A Classification of Irreducible Prehomogeneous Vector Spaces and Their Relative Invariants", Nagoya Math. J. Vol. 65, 1-155 (1977)

[2] T. Kimura, "A Classification of Prehomogeneous Vector Spaces of Simple Algebraic Groups with Scalar Multiplication", J. of Alg. Vol 83, 72-100 (1983)

[3] T. Kimura, S-I. Kasai, & O. Yasukura, "A Classification of the Representations of Reductive Algebraic Groups which Admit Only a Finite Number of Orbits" to apper in Amer. J. of Math.

[4] 保倉理美,「概均質ベクトル空間の1つの同値変形について」, 京大数理研講究録 497, 201-204 (1983)

[5] 笠井伸一,「可約な概均質ベクトル空間の一例」, 京大数理研講究録 497, 190-200 (1983)

[6] 犬塚晶明, 2個の単純群を半単純成分にもつ可約線型代数群の概均質ベクトル空間の分類について, 筑波大修論 (1985)